

ライナックのビーム物理

1. はじめに

本章では、大強度陽子加速器施設である J-PARC (Japan Proton Accelerator Research Complex) のライナックを例にとり、大強度陽子ライナックにおけるビーム物理について紹介していきたい。

J-PARC は 181MeV のライナック、3GeV の RCS (Rapid Cycling Synchrotron)、30GeV の MR (Main Ring) からなる大強度加速器施設であり、3GeV と 30GeV という異なる 2 種類のエネルギーの陽子ビームを実験施設に供給することによって、バラエティーに富んだ二次粒子を用いた実験を可能としているのが、その特色となっている[1]。J-PARC では、現在、各実験施設へのビーム供給を行いながら、設計ビーム出力である 30GeV のエネルギーで 1MW、30GeV のエネルギーで 0.75MW の達成を目指して、加速器群のビームコミッションング (ビーム調整運転) が行われている[2]。

J-PARC がその一つの好例であるが、陽子ビームは様々な二次粒子ビームを生成する“ドライバー”として非常に有用であり、現在、様々な用途を目指した陽子加速器あるいは“プロトンドライバー”¹の建設が世界各国で計画されている。最新のプロトンドライバーであり、すでに建設され稼働が開始されているものとしては、J-PARC の他に、米国の SNS (Spallation Neutron Source) があげられる。SNS は二次粒子として生成する中性子の利用に特化した陽子加速器施設であり、2009 年、加速器ベースのパルス中性子源として世界最高出力である 1MW のビーム加速に成功し、現在、設計ビーム出力である 1.4MW を目指したビームコミッションングを継続している[3]。

一方、加速器のビーム出力が大きくなってくると、ビームロスの低減が本質的な課題となってく

る。ここでいうビームロスとは、「ビームを構成する粒子が何らかの原因で正常に加速あるいは輸送されず、ビーム軌道を囲む真空チャンバーに衝突して失われる現象」である。大強度加速器においては、極めてわずかな割合のビームロスでさえ加速器本体の放射化を引き起こし、そのメンテナンスを著しく困難にする。実際に、大強度陽子加速器では、多くの場合、ビームロスに起因する加速器本体の放射化が、最終的にその加速器のビーム出力を制限すると考えられている。プロトンドライバーはしばしば全長 1km を超えるような大規模な加速器施設であり、そのような施設全体に渡って遠隔メンテナンスシステムを構築することはコスト的に実現が難しい。そのため、加速器の設計を行うにあたっては、人が直接手を触れてメンテナンスを行う、いわゆる“ハンズオンメンテナンス”を想定することが通例となっている。このハンズオンメンテナンスを実現するためには、ビームロスをおよそ 1W/m 以下に抑える必要があると考えられている[4]。すなわち、ビーム出力が 1MW のプロトンドライバーでは、ビームロス率をおよそ 10%/m 以下に抑える必要があることとなる。このような非常に小さな割合のビームロスを予測しコントロールすることが、大強度陽子ビームにおけるビーム物理の非常に大きな課題となっている。大強度陽子加速器施設の前段部を構成する陽子ライナックもその例外ではない。

J-PARC は MW クラスのビーム出力を目指すプロトンドライバーの先駆けの一つであり、ここで直面する種々のビーム物理学的課題を克服していくことは、今後、より高出力のプロトンドライバーを実現していく上で、非常に重要であることを強調しておきたい。

本章では、大強度陽子ビームにおけるビーム物理のうち、入射器であるライナックで重要になる現象を紹介する。ライナックでは、円形加速器 (シンクロトロンあるいは蓄積リング) に比べてビームのエネルギーが低いため、空間電荷効果がより顕著となる。(高エネルギー部では、空間電荷効果はビーム自信の誘起する磁場によって打ち消

¹ 本章では、加速された一次ビームである陽子ではなく、もっぱら二次粒子を利用する目的で建設された陽子加速器のことをプロトンドライバーと呼ぶこととする。

されるため、その効果は小さくなり、逆にビームのもつ電磁場と外界との相互作用によってもたらされるビームの集団的な不安定性が重要度を増してくる。) 次の2節では、空間電荷効果によって引き起こされる主な現象を概観し、3節では、その中でもビームロスに直接関連するビームハローの生成について、より詳しく解説する。

本章では、J-PARC ライナックの構成やその設計については繰り返さない。これらについては、2001年のOHOのテキスト[5]や参考文献[6]に詳しいのでそちらを参照してほしい。

J-PARC では、ライナックから3GeVシンクロトロンにビームを入射する際には、先に入射したビームに重畳してビームを入射する多重入射が行われる。すなわち、シンクロトロン中を周回して入射点に戻ってくるビームに重ねるように次のビームが入射される。この入射の際に、リウビウの定理に制限されずに位相空間中でのビーム密度を高めるために、ライナックでは負水素イオンを加速し、入射の際にカーボンフォイルで電子を剥ぎ取って陽子に変換している。すなわち、J-PARC ライナックで加速される粒子は陽子ではなく負水素イオンであるが、イオン源を除けば、加速する粒子が陽子でも負水素イオンでも、ライナック自体の設計は変わらない。本章では、加速器分野での通例に習って加速する粒子が陽子であるか負水素イオンであるかに関わらず、「陽子ライナック」と呼ぶことにする。

2. 空間電荷効果による様々な現象

2.1. 空間電荷効果とは

空間電荷効果とは、ビームを構成する各粒子がもつ電荷が各粒子の運動に及ぼす効果のことである。実際には電荷を担っているのはビームを構成する個々の粒子であり、個々の粒子の作るすべてのペアについて二体間のクーロン力を足しあげていってやれば、この効果を記述することができる。

る²。しかし、ビームを構成する粒子の数は非常に多いので、その粒子が作るペアの数も膨大なものになる。「空間電荷」という言葉の中には、そのような微視的な描像に立つのではなく、もう少し粗っぽく (coarse grained に) 現象を捉えて、「ビームを構成する粒子の電荷が連続体としてある空間を満たしており、各粒子は、その空間を満たす電荷から力を受けながら運動する」という描像が含まれている。

この描像は、空間電荷効果の数値シミュレーションにしばしば用いられる Particle-In-Cell 法[7]を例にとるとイメージしやすいかもしれない。Particle-In-Cell 法では、ビームはシミュレーション粒子の集合としてモデル化され、ビームのもつ電荷は個々のシミュレーション粒子に分配される³。次に、シミュレーション粒子が他のシミュレーション粒子のもつ電荷から受ける力を計算する必要があるが、ここで直接二体間のクーロン力を計算するのではなく、ビームが存在する空間にメッシュを導入し、シミュレーション粒子のもつ電荷を近傍のメッシュの格子点にいったん分配する。そうすることによって「電荷の分布関数」を得ることができる。この「電荷の分布関数」を用いて、Poisson 方程式を解くことにより、「電場」を位置の関数として求めることができる⁴。そうすると、今着目している粒子の位置における「電場」から、その粒子の受ける「空間電荷力」を知ることができ、ある微小な時間が経った後の粒子の位置が計算できる。そして、このプロセス

² より正確に言うと、個々の粒子が作る「電流」が磁場を生成し、その磁場を介して粒子間に電磁力が働く。通常、個々の粒子がビームの進行方向に進むことによって生じる電磁力も空間電荷力に含めて考える。

³ 計算時間を短縮するため、Particle-In-Cell 法で用いられるシミュレーション粒子の数は、実際にビームを構成する粒子の数よりもずっと少ないのがふつうである。

⁴ Particle-In-Cell 法においては、電荷分布は格子点上に離散化した関数として与えられる。Poisson 方程式は偏微分方程式であるが、偏微分方程式を離散化して解くのは数値解析の常套手段である。このあたりの具体的なアルゴリズムについては、参考文献[8]を参照してほしい。離散化した Poisson 方程式を解くことによって、格子点上での空間電場が求められることになる。この格子点上の空間電場から内挿することによって、着目している粒子の位置での空間電荷力を求めることができる。

を繰り返すことによって、粒子の運動を追跡できることとなる。

お気づきのように、Particle-In-Cell 法におけるモデル化の本質的に重要な点は、直接シミュレーション粒子間のクーロン力を計算するのではなく、いったん「電荷分布」に焼き直すところであり、このことは「電荷が連続体としてある空間を満たしている」という空間電荷の概念と密接に結びついている。

2.2. 空間電荷の中和

大強度陽子ライナックにおいては、空間電荷効果によって周期的な外部収束力（ビームを限られた空間に閉じ込めるために外部から加える収束力）との間の共鳴現象や、ビーム密度の高いコアの周りに希薄なビームハローが生成される現象等、様々な現象が引き起こされることが知られている。空間電荷効果は本質的に多体现象であり、その研究は前述の Particle-In-Cell 法を用いた粒子シミュレーションに負うところが大きい。近年は計算機の速度が飛躍的に向上したこともあり、数百万個、ときには数十億個のシミュレーション粒子を用いたシミュレーションも行われるようになってきた[9]。上述のような非常に小さな割合のビームロスを見逃すためには、このような大規模シミュレーションの導入によってシミュレーションの精度を極めて高いものにすることが要求されている。しかし、大強度陽子ビームのシミュレーション研究において常に問題となるのが、「十分現実的な初期分布を用いてシミュレーションを行えているか」ということである。上述のように、空間電荷力は低エネルギー部ほどその影響が顕著になる。最近の陽子ライナックでは、イオン源から引き出した運動エネルギーが数十 keV の陽子（あるいは負水素イオン）を RFQ (Radio Frequency Quadrupole linac) [10]と呼ばれる加速空洞に入射して 3MeV 程度までの初期加速するのが定番となっている。このイオン源と RFQ をつなぐビーム輸送系 (Low Energy Beam Transport または LEBT と呼ばれる) で輸送されるビームのエネルギーは陽子ライナックの中でも際立って

低く、そのためこのセクションにおける空間電荷効果が際立って強い。空間電荷効果が顕著な系では、空間電荷に起因する発散力に打ち勝つだけの外部収束力を与えてやらないと、ビームはたちまちにしてこの効果のもつ非線形性によって「エミッタンス」が増大してしまう。ここでいう「エミッタンス」とは位相空間でビームの占める体積を表し、加速器のビームの質を示す重要な指標となっている。リウビウの定理から、いったん増大してしまったエミッタンスを小さくすることは、ビーム冷却と呼ばれる特殊なプロセスによらない限り、行うことができない[11]。したがって、加速器においては、通常、いかにエミッタンスを増大させないように加速するかが重要な課題となる。

この LEBT は長さがふつう 1m 程度のごく短いビーム輸送系であるが、空間電荷効果が非常に強く、いかに空間電荷の影響をコントロールしつつこのセクションのビーム輸送を実現するかが大強度陽子ライナックの設計上、ひとつの大きな課題となっている。J-PARC の LEBT では、この空間電荷効果を緩和するため、「空間電荷の中和」と呼ばれる現象を積極的に利用している。加速器では気体分子との散乱によってエミッタンスが増大したりビームが失われたりするのを防ぐため、ビーム軌道をチャンバーで囲み、高真空状態に保つのが通例である。しかし、LEBT ではイオン源から負水素イオンの生成に用いる水素ガスの流入があるため、真空度が他のセクションに比べると良くないことが多い。そのような環境の中に負水素イオンのビームを入射するとチャンバー中の残留ガスが負水素イオンとの衝突によってイオン化される。そして、このとき生じた正イオンの一部はビームのもつ空間電場に捕捉され、その空間電場を中和する⁵。このプロセスは、原理的にはある時定数をもって空間電荷を完全に中和するまで進行する。しかし、現実の加速器では

⁵ 空間電荷の中和は陽子ビームの場合も起こりうる。この場合は、チャンバー中に生じる電子も重要な役割を果たす。負水素イオンビームの場合には、残留ガスとの散乱によって自分自身も軌道電子を失って正イオンのソースになり得る。

空間電荷が完全に中和されることは無く、どの程度の中和が実現されているかは実験的に求められることが多い。J-PARCのLEBTでは、この空間電荷の中和の助けを借りることによって、空間電荷による発散力および非線形効果を抑制し、比較的弱い収束力で収束しながらビームをRFQに導いている。この空間電荷の中和のプロセスはモデル化が容易でなく、そのことに起因する曖昧さが下流のビームシミュレーションを行う上で非常に大きな課題となっている。実際、実験的に求められる空間電荷の中和の度合いについても、どのようなメカニズムでそれが決まっているのか必ずしも明確ではない。この空間電荷の中和の定量的な理解を深めることが、今後、大強度陽子ビームのシミュレーションの精度を上げていく上で鍵となると考えられる。このあたりは、プラズマ物理と加速器物理の境界に位置しており、プラズマ物理の知見を生かすことによって現象の理解やモデルの高度化が進められることが今後期待される。

2.3. 構造共鳴

空間電荷力に打ち勝ってビームを空間的にごく限られた領域に閉じ込めて加速するために、加速器では外部から収束力を加えながらビームを加速する。この外部収束力は、最上流部であるRFQでは高周波電場によって与えられるが、それ以降では通常、四重極磁場によって与えられる。そのため四重極電磁石と加速するための加速空洞の配置の設計を、ラティス設計と呼ぶ。ライナックのラティス設計においては、ビームのエネルギーが下流に行くにしたがって増加するため、厳密な意味での周期的なラティスは実現できないが、近似的に周期的な系を構築することが通例となっている。そうすることによって、その系に整合の取れた（すなわち無駄なビームサイズの振動が起こらない）ビーム条件を見つけることが容易になる。無駄なビームサイズの振動は、エミッタンスの増大や後述するビームハロー生成の原因になることが知られている。

一方、ラティスに近似的な周期性を導入することによって、共鳴現象に対する考慮が必要となってくる。一般にビームを構成する各粒子は、理想的な軌道の周りを振動しながら加速されていく。この粒子の振動の周期は、外部から与える収束力の強さによって定まる。一方で、外部収束力を与える四重極電磁石はある特定の周期で配置されているので、その周期とビームの振動の周期が一定の条件を満たすと共鳴現象が引き起こされ、エミッタンスの増大あるいはビームロスの原因となる。この現象を「構造共鳴」と呼ぶ。ライナックでは円形の加速器と異なり、同じ場所を粒子が何度も周回することはない。そのためライナックで加速される間に粒子が振動する回数は円形加速器に比べて桁違いに小さく、陽子ライナックの場合、ふつう数回から数十回程度である。したがって、陽子ライナックの設計においては、成長率の特に大きい共鳴だけを考慮すれば良いということになる。ただし、ここで注意しなければならないのは、共鳴の影響の評価にあたって、空間電荷効果の果たす役割を考慮に入れる必要があるということである。

空間電荷効果が顕著なビームにおける構造共鳴は、1980年代に精力的な研究が行われた[12]。この時期は、重イオンビームを用いた慣性核融合に応用することに強く動機づけられて、大強度イオンビームにおける空間電荷効果の理解が大きく前進した時期である。理論的には、線形化されたブラソフ方程式⁶を用いて、KV（Kapchinsky-Vladimirsky）分布[13]の安定性が解析され、ビームが不安定になる条件が導き出された。しかし、現実のビーム分布は一般にKV分布とは異なると考えられるため、ここで導き出されたすべての条件で実際にエミッタンス増大やビームロスが引き起こされるとは限らない。したがって、陽子ライナックを設計する上では、どの共鳴が実際に危険で、どの共鳴が危険でないかを見極めることが肝要となる。この時期、2次元のParticle-In-

⁶ より正確には、ブラソフ方程式について、その定常分布についての摂動を考え、摂動の一次の項までをとった方程式。周期的な収束系における定常分布はKV分布しか知られていない。

Cellシミュレーションも大強度ビームにおける空間電荷効果の研究に本格的に取り入れられ、これを用いて、より現実的であると思われるビーム分布における構造共鳴の研究が行われた。その結果、「収束系1周期あたりの粒子振動の位相進みが90度以下になるように設計すれば、危険な共鳴は避けることができる」というのが大強度イオンライナックの設計指針として広く認められてきた。しかし、最近になって位相進み60度付近の共鳴がSNSのライナックでビームロスの原因になっている可能性が指摘される等、議論が再燃する兆しもある[3]。

2.4. 縦横結合共鳴

一方、粒子の振動にはビームの進行方向(縦方向)の振動とそれに垂直な面内(横方向)での振動の2種類がある。大強度のイオンビームにおいては、粒子の縦方向の運動と横方向の運動が空間電荷効果によって結合しており、この2つの振動の間の結合共鳴も起こり得る。この結合共鳴の条件が満たされると、縦方向のエミッタンスが横方向に、あるいは横方向のエミッタンスが縦方向に移動する。この共鳴については、1990年代後半から2000年代前半にかけて精力的な研究が行われ、「加速の過程で結合共鳴条件を一時的に満たすことは危険ではない」というのが現在の一般的な理解となっている[14]。加速の全区間において結合共鳴条件を避けることは陽子ライナックの設計上非常に強い制約となるため、この知見は実用上、非常に大きな意味がある。

これら2つの共鳴条件は、現実の陽子ライナックを設計する上で非常に重要な設計指針を与えるものであるが、その実験的な検証が十分に行われているとは言い難い。より大強度のプロトンドライバーが求められるに従って、より詳細な検証が求められてきており、そのことを背景として、共鳴条件の実験的な検証を行う努力が現在でも進められている[15]。

ちなみに、J-PARCのライナックでは、「収束系1周期あたりの粒子振動の位相進みが90度以下になる」ようにし、かつ「縦横結合共鳴を加速の

全区間に渡って避ける」ことができる設計となっている。しかし、縦横結合共鳴を避ける運転パラメータを実現するためには、ビームの縦方向と横方向のエミッタンスの情報が必要であり、特にビームの縦方向のエミッタンスをいかに正確に測定するかが現在の課題となっている。

2.5. ビームハローの生成

空間電荷効果によって引き起こされる現象の中でも、特にビームロスに直結する現象であると考えられているのが、密度の高いビームコアの周りに希薄なビームハローが形成される現象である。このビームハローの生成過程は1990年代半ばから盛んに研究され始めた[16]。

前述のように構造共鳴や縦横結合共鳴はラティス設計で避けることが可能である⁷と考えられているが、このビームハローの生成はラティス設計で避けることができない。言い換えれば、どのようなラティス設計を採用した陽子ライナックであっても、運転パラメータのチューニングが十分でなければビームハローが生成し得る。このことに関して、J-PARCのライナックも例外ではない。特に大強度陽子ライナックにおいてはわずかな割合のビームロスも加速器本体を放射化を引き起こすのに十分であるため、このビームハローの生成を抑制することは、大強度フロンティアを目指す陽子ライナックにおいて本質的に重要である。

このビームハローの生成については、節を改めて次節で詳しく解説する。

3. ビームハローの生成

3.1. エンベロープ方程式

ビームハローの生成について詳細を紹介する前に、その準備として、エンベロープ方程式と呼ば

⁷ 前述のように、縦横結合共鳴を避けるためにはビームの縦方向と横方向のエミッタンスの情報が必要であるが、あらかじめその情報があれば、ラティス設計によって共鳴を避けることは可能である。

れる方程式を紹介しておきたい。エンベロープ方程式は、ビームハローの生成過程の理解だけでなく、空間電荷効果が無視できない系におけるビーム力学設計を行う上で欠かすことのできない基礎的な方程式のひとつである。

空間電荷力は、「ビームを構成する他の粒子がもつ電荷が、着目している粒子の運動に及ぼす力」である。したがって、空間電荷効果が無視できない系においては、ビームを構成する個々の粒子の運動をバラバラに扱うのではなく、その集団的な効果を取り入れた運動の定式化が必要である。その方法の一つがビームの「モーメント」を用いる方法である。

加速器中のビームはバンチ構造をもつことが多いが、ここではDCビーム、すなわちビームの進行方向に無限の長さをもつビームを考える。このビームの進行方向を s とし、これに垂直な平面上の座標を (x, y) とする。また、 x の s に対する微分を x' 、 y の s に対する微分を y' と書くこととする。すなわち、 $x' \equiv dx/ds$ 、 $y' \equiv dy/ds$ であり、 x' は x 方向の運動量に、 y' は y 方向の運動量に相当する量である。したがって、ビームを構成する個々の粒子の位相空間上での座標は (x, y, x', y') で表すことができる。

ここで、ビームを構成する全粒子について、 x の平均を取ったものを $\langle x \rangle$ と書くこととする。物理的には、これはビームの重心の x 方向の位置に相当する。同様に、 x' についての平均である $\langle x' \rangle$ も定義できる。この $\langle x \rangle$ と $\langle x' \rangle$ を、 x についての1次のモーメントと呼ぶ。

さらに、ビームを構成する全粒子について、 x^2 の平均を取ったものを考え、これを $\langle x^2 \rangle$ と書くことにしよう。同様に、 $\langle x'^2 \rangle$ や $\langle xx' \rangle$ も定義できる。これら3つを x 方向についての2次のモーメントと呼ぶ。物理的には、 $\langle x^2 \rangle$ は x 方向のビームの広がり、 $\langle x'^2 \rangle$ は x' 方向のビームの広がりを、 $\langle xx' \rangle$ は x と x' の相関の強さを表している。

2次のモーメントは、2つの自由度間にまたがって定義することもできる。例えば、ビームを構成する全粒子について、 xy の平均を取ったものは

$\langle xy \rangle$ となる。このようなモーメントは、 x と y の相関を議論するとき重要となるが、本章では2つの自由度間にまたがる相関がない場合に議論を限りたい。

また、3次以上のモーメントも同様に定義でき、高次の共鳴現象が見られるときの解析等にはしばしば用いられるが、これも本章では割愛したい。

したがって、ここではビームのもつ1次のモーメントと2次のモーメントに限って、議論していく。

ここで、ビームを構成する個々の粒子の運動が次のような運動方程式に従うと仮定しよう。

$$\frac{d^2x}{ds^2} = K_x(s)x + F_x(x, y, s) \quad (3-1)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = K_y(s)y + F_y(x, y, s) \quad (3-2)$$

ここで、ビームに働く外部収束力としては完全に線形なものを考え、その強さを $K_x(s)$ 、 $K_y(s)$ と書いた。 $F_x(x, y, s)$ は、その位置における空間電荷力の x 方向の強さを表す関数、 $F_y(x, y, s)$ は、その位置における空間電荷力の y 方向の強さを表す関数である。

ビームを構成する全粒子について、式(3-1)、(3-2)の平均をとることによって、1次のモーメントが従う方程式を導くことができる。平均を取る操作と微分を取る操作は可換であることを用いて、

$$\frac{d^2}{ds^2} \langle x \rangle = K_x(s) \langle x \rangle + \langle F_x(x, y, s) \rangle \quad (3-3)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \langle y \rangle = K_y(s) \langle y \rangle + \langle F_y(x, y, s) \rangle \quad (3-4)$$

ここで、 $\langle F_x(x, y, s) \rangle$ のもつ意味を考えてみよう。 $\langle F_x(x, y, s) \rangle$ は、その定義から、各粒子が受ける空間電荷力の x 方向の分力をすべて足し合わせて、粒子数で割ることによって得られるものである。一方、空間電荷力とはクーロン力のことなので、

微視的な描像に立ち返れば、ビームを構成する各粒子について取りうる可能な全てのペアについて、クーロン力を足し合わせていくことによって、この項を求めることができることになる。

ここで「作用・反作用の法則」を思い出してほしい。作用・反作用の法則から、粒子 A が粒子 B に及ぼす力と粒子 B が粒子 A に及ぼす力は大きさが同じで向きが逆である。したがって、この2つの力を足し合わせると、互いに打ち消し合って合力はゼロになる。「ビームを構成する各粒子について取りうる可能な全てのペアについて、クーロン力を足し合わせていく」とき、着目しているクーロン力の反作用が必ずその中に含まれるはずである。このことから、この平均操作において、最終的にすべてのクーロン力が打ち消されることがわかる。すなわち、

$$\langle F_x(x,y,s) \rangle = 0 \quad (3-5)$$

y方向も同様である。

$$\langle F_y(x,y,s) \rangle = 0 \quad (3-6)$$

したがって、式(3-3), (3-4)は次のように書き換えられる。

$$\frac{d^2}{ds^2} \langle x \rangle = K_x(s) \langle x \rangle \quad (3-7)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \langle y \rangle = K_y(s) \langle y \rangle \quad (3-8)$$

この式から、ビームの重心は空間電荷効果がない場合の運動方程式に従うこと、言い換えれば、空間電荷効果はビームの重心の運動に影響を与えないということがわかる。

次に、2次のモーメントの従う方程式を考える。平均を取る操作と微分を取る操作は可換であることを用いて、

$$\frac{d}{ds} \langle x^2 \rangle = 2 \langle xx' \rangle \quad (3-9)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \langle x^2 \rangle = 2 \langle x'^2 \rangle + 2 \left\langle x \frac{d^2 x}{ds^2} \right\rangle \quad (3-10)$$

ここで、式(3-1)を(3-10)に代入して、

$$\frac{d^2}{ds^2} \langle x^2 \rangle = 2 \langle x'^2 \rangle + 2k_x \langle x^2 \rangle + 2 \langle xF_x \rangle \quad (3-11)$$

Sacherer によって、楕円対称な分布をもつビームについては、一般に、次の式が成り立つことが導き出された[17]。

$$\langle xF_x \rangle = \frac{K}{2} \frac{x_{rms}}{x_{rms} + y_{rms}} \quad (3-12)$$

ここで、 K は **generalized perveance** と呼ばれる空間電荷力の強さを表すパラメータで、粒子の質量を m 、電荷を q 、ビーム電流を I 、relativistic factor を β 、 γ 、光速を c 、真空の誘電率を ϵ_0 とすると、 $K = qI/2\pi\epsilon_0 mc^3 \beta^3 \gamma^3$ と表される[18]。また、 $x_{rms} \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ 、 $y_{rms} \equiv \sqrt{\langle y^2 \rangle}$ は、それぞれ x 方向、 y 方向の rms (root-mean-squared) ビームサイズである。

式(3-9)から(3-12)を用いると、 x_{rms} の時間発展を表す次のような方程式を導き出すことができる。

$$\frac{d^2 x_{rms}}{ds^2} = K_x(s) x_{rms} + \frac{K}{2(x_{rms} + y_{rms})} + \frac{\epsilon_{rms,x}^2}{x_{rms}^3} \quad (3-13)$$

ここで、 $\epsilon_{rms,x}$ は x 方向の rms エミッタンスと呼ばれる量で、次式で定義される。

$$\epsilon_{rms,x} \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} \quad (3-14)$$

y方向も同様である。

$$\frac{d^2 y_{rms}}{ds^2} = K_y(s) x_{rms} + \frac{K}{2(x_{rms} + y_{rms})} + \frac{\epsilon_{rms,y}^2}{y_{rms}^3} \quad (3-15)$$

$$\epsilon_{rms,y} \equiv \sqrt{\langle y^2 \rangle \langle y'^2 \rangle - \langle yy' \rangle^2} \quad (3-16)$$

rms エミッタンスは、位相平面上でのビームの広がりを表す量であり、線形な系では保存することも簡単に確かめられる。

式(3-13), (3-15)は、rms ビームサイズの時間発展を記述する方程式であり、「エンベロップ方程式」あるいは「rms エンベロップ方程式」と呼ばれている。実際のビームでは rms エミッタンスは様々な要因で変動するが、rms エミッタンスが保存すると仮定し、式(3-13)と(3-15)を連立して解くことによって、rms ビームサイズの時間発展を近似的に追跡することができる。

ここで、通常シミュレーションや解析的な研究で用いられるビーム分布については、ビームのエッジサイズ (100%エンベロップ) と rms ビームサイズの間には、比例関係があることが多いということを指摘しておきたい。例えば、KV 分布を保ったまま運動するビームを考えた場合、ビームのエッジサイズは常に rms ビームサイズの2倍である。このような場合には、rms エンベロップ方程式からビームエッジサイズの時間発展を記述する方程式、すなわち 100%エンベロップのエンベロップ方程式も容易に導ける。次節以降でビームのコアの振動の記述に用いるエンベロップ方程式は、この 100%エンベロップ方程式であることに注意してほしい。

バンチされたビームについても同様にエンベロップ方程式を導くことは可能であるが、ここでは参考文献をあげるに留めておく[16,17]。

3.2. 粒子- 核モデル

2節で紹介したように、ビームハローとはビーム密度の高いビームコアの周りに形成される希薄なビームの分布のことである。大強度陽子ライナックにおいてこのビームハローが生成されるメ

カニズムは、粒子- 核モデルと呼ばれる次のような簡単なモデルで理解できる⁸。

まず、ビームコアの運動を考えよう。実際の J-PARC ライナックのビームはバンチされたビーム、すなわちビームの進行方向に有限な長さをもつビームであるが、ここでは再び、DC ビームを考える。さらに簡単のために、KV 分布と呼ばれる特殊な分布をもつビームコアを考える。KV 分布をもつビームでは、ビームの 100%エンベロップ、すなわちすべての粒子がその内側に存在する境界のサイズが定義され、その内側では空間電荷効果によって生じる発散力の大きさがビーム軸からの距離に比例する。また、 x 方向の 100%エンベロップを $\pm a$ 、 y 方向の 100%エンベロップを $\pm b$ とすると、式(3-13), (3-15)より、その時間発展は、次のようなエンベロップ方程式に従うことが求められる。

$$\frac{d^2 a}{ds^2} + K_x(s)a = \frac{2K}{a+b} + \frac{\epsilon_x}{a^3} \quad (3-17)$$

$$\frac{d^2 b}{ds^2} + K_y(s)b = \frac{2K}{a+b} + \frac{\epsilon_y}{b^3} \quad (3-18)$$

ここで、 ϵ_x と ϵ_y は 100%エミッタンスと呼ばれる定数で、それぞれ rms エミッタンスの4倍の値となる。 K_x と K_y は外部収束力の x 方向と y 方向の成分であり、ふつう s に対する周期関数であると仮定する。一般に外部収束力は非線形であり得るが、ここでは再び、線形な外部収束力のみを考える。

ここで、さらに簡単化するために、外部収束力が x 方向と y 方向で対称でありかつ s 依存性をもたない場合を考える。また、 x 方向と y 方向のエミッタンスが等しいものとする。このとき、2つの定数 $K_0 \equiv K_x = K_y$ と $\epsilon \equiv \epsilon_x = \epsilon_y$ を用いて、式(3-17)、(3-18)を次のように書き直すことができる。

$$\frac{d^2 a}{ds^2} + K_0 a = \frac{2K}{a+b} + \frac{\epsilon}{a^3} \quad (3-19)$$

⁸ ビームハロー生成のメカニズムとして、これ以外のものが存在しないことが示されているわけではない。

$$\frac{d^2b}{ds^2} + K_0b = \frac{2K}{a+b} + \frac{\varepsilon}{b^3} \quad (3-20)$$

このような簡単な系を考えると、式(3-19)、(3-20)から、2つの条件 $da/ds=0$ 、 $db/ds=0$ を満たすビームサイズ a_0 および b_0 が存在することがわかる。この場合、 $a_0=b_0$ となることは、式(3-19)、(3-20)からすぐに見てとれる。したがって、 $s=0$ において、ビームが初期条件 $a=b=a_0$ 、 $da/ds=db/ds=0$ を満たせば、ビームサイズは $a=b=a_0$ で一定となる。この状態を整合の取れた状態と呼び、 a_0 を整合の取れたビームサイズ、この状態を実現するための初期条件をビームの整合条件と呼ぶ。

初期状態 ($s=0$) において、この整合条件が満たされなかった場合、すなわちビームに不整合がある場合、 a と b は a_0 の周りで振動することとなる。不整合のある場合の a と b の時間発展は、式(3-19)と(3-20)を積分することによって得ることができるが、これらの式から a と b の運動には2つの固有振動モードが存在することが導き出せる。1つは a と b が同相で振動するモード（脈動モード）であり、もう1つは a と b が逆相で振動するモード（四重極モード）である。一般に a と b は、与えた初期条件に応じて、この2つのモードが混合した振動を行う。

ここで、初期状態に不整合があり、 a と b が式(3-19)、(3-20)に従って振動しているビームコアを考える。さらに、このビームコアの周りを運動するテスト粒子を考えよう。ここで「テスト粒子は振動するビームコアの空間電荷力の影響を受けるが、ビームコアの振動はテスト粒子の運動の影響を受けない」と近似する。このテスト粒子はビームハローを模擬するものであるが、ビームハローを構成する粒子数はビームコアを構成する粒子数と比較して非常に少ないと考えられるので、上述の近似は良い近似として成り立つと考えられる。

KV 分布をもつコアにおける空間電荷力は、コアの内側では線形な発散力となり、コアの外側ではガウスの法則に従って減衰していく発散力と

なる。したがって、 (x, x') 位相平面上を運動するテスト粒子の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K_0x = \frac{2K}{a(a+b)}x \quad (|x| \leq a \text{ のとき}) \quad (3-21a)$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K_0x = \frac{2K}{x^2 + |x|\sqrt{x^2 + b^2 - a^2}}x \quad (|x| > a \text{ のとき}) \quad (3-21b)$$

いくつかの異なる初期条件をもつテスト粒子について、式(3-21)を積分することによって振動するビームコアの周りにおけるテスト粒子の時間発展を追跡した結果を示したものが図1である[19]。図1ではコアのエンベロープが最大になる位相におけるテスト粒子の (x, x') 位相平面上での位置をプロットしている。このような図を「ポワンカレ断面図」[20]と呼ぶ。ポワンカレ断面図は、ある特定の位相における粒子の位相空間での座標のみをプロットしたものであり、加速器物理においては、ラティスの周期性の影響を取り除いて、粒子の運動が本来もつ安定性を明確に表示するためにしばしば用いられる。図1の左の図はコアが純粋な脈動モードの振動を行っているとき、右の図は純粋な四重極モードの振動を行っているとき、中央の図は脈動モードと四重極モードの混合した振動を行っているときの計算結果である。図1の上段は、それぞれのモード混合におけるビームサイズの振動の様子を表したものである。下段のポワンカレ断面図で、粒子がある閉曲線上にある場合は粒子の運動が正則であることを表し、粒子がある領域を塗りつぶすような動きをする場合は粒子の運動がその領域でカオス的であることを表している。

この図から、ある初期状態をもったテスト粒子については、エンベロープの振動とテスト粒子の振動の間に2:1のパラメトリック共鳴が起こることがわかる。図の原点付近から出発した粒子は、原点の周りを単純に周回する。これらの粒子は原

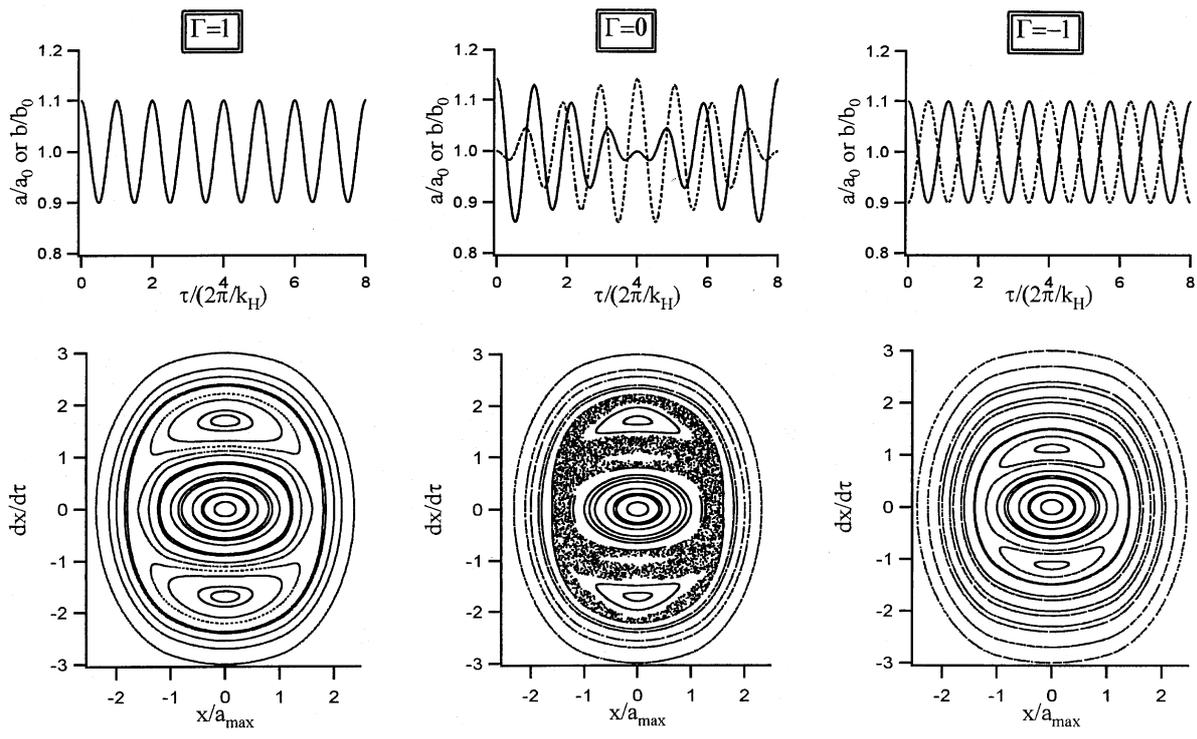


図 1. 粒子-核モデルに基づいて計算された単粒子のビームコアの周りでの運動の様子。上段はコアのエンベロップの振動の様子を表したもので、実線が水平方向のエンベロップ、破線が鉛直方向のエンベロップを表す。下段はこのコアの周りで運動するテスト粒子の運動の様子を表したもので、コアの水平方向エンベロップが最大になった位相での (x, x') 位相平面上での位置をプロットしたもので、左はコアが純粋な脈動モードの振動をしている場合、右は純粋な四重極モードの振動をしている場合、中央は脈動モードと四重極モードが混合した振動をしている場合。

点の周りで振動しながらビームコアの内部にとどまる粒子であると考えられる。それに対して、原点から x' 方向にある距離以上はなれた位置から出発した粒子は、原点の周りを単純に周回するのではなく、 x' 軸上にコアから離れた位置に形成される 2:1 共鳴の安定不動点の周りを周回し始める⁹。そのことによって、初期には比較的コアの近傍にいた粒子もコアから離れた位置まで到達することができるようになる。この図では 2:1 共鳴の安定不動点は x' 方向にコアからはなれた位置に形成されるが、エンベロップが最小になる位相で同様のプロットを作ると、同様の安定不動点が x 方向に離れた位置に形成される。したがって、

これらの粒子は、エンベロップが最小になる位相では、コアから実空間方向に離れた位置に現れることとなる。これがハローとして観測される粒子であると考えられる。すなわち、このモデルから、「単粒子の運動とコアの振動の間の 2:1 共鳴に捕らえられた粒子がコアとの相互作用によってエネルギーをもらい、振幅を増大させてハローを形成する」という描像が得られる。

図 1 の左右の図では、テスト粒子の軌跡は閉曲線を描く。それに対して、中央の図では、ある位相平面内の領域でテスト粒子が任意の位置を取りうるように見える。これはこの領域でテスト粒子の運動がカオス的になっていることを表している。中央の図では、このカオス的な領域が 2:1 共鳴のアイランドの周りに形成され、かつ中央のコアの周りを安定に周回する領域を狭めていることがわかる。このことは、コアが脈動モードと

⁹ この領域 (アイランド) に捉えられた粒子が共鳴を起こしていることは、1 周期ごとのテスト粒子の動きを詳細に追跡することによって明らかになる。この領域では、テスト粒子は 2:1 の共鳴を起こしているため、上下のアイランドに交互に現れる。

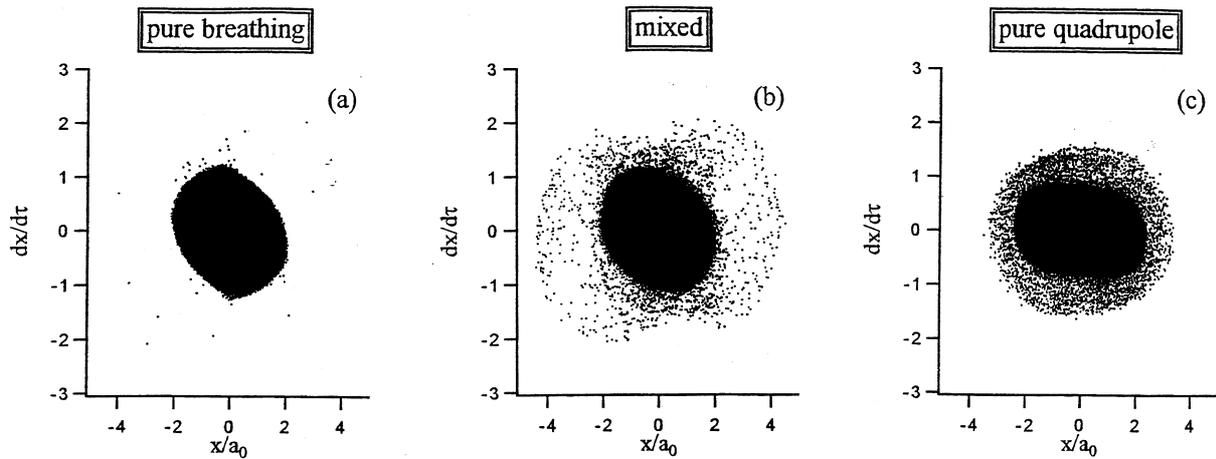


図2. Particle-In-Cell シミュレーションの結果得られたビーム分布を (x, x') 位相平面上に射影したものの。左はコアが純粋な脈動モードの振動をしている場合、右は純粋な四重極モードの振動をしている場合、中央は脈動モードと四重極モードが混合した振動をしている場合。

四重極モードの混合した振動を行っているときには、粒子のカオス的な振る舞いによってハローの形成が助長される可能性があることを示唆している。

このモデルからわかるもう一つ重要なことは、生成されたビームハローは際限なく広がるわけではなく、その大きさにある上限が存在することである。図1に見られる2:1共鳴のアイランドに捕らえられた粒子は、このアイランドの外側の境界までは達するが、それ以上にコアから離れることはない。また、2:1共鳴のアイランドの外側に、他の大きな共鳴のアイランドが存在しないことも簡単な数値計算で確かめることができる。したがって、このようなメカニズムによって生成されるビームハローの半径にはある最大値があることとなる。このモデルから得られるビームハローの最大半径は、実際の大強度陽子ライナックの設計において、ビーム口径を定める際的设计基準として採用されている。

このような単純なモデルから理解できるメカニズムでビームハローが形成されることを、Particle-In-Cell法を用いた粒子シミュレーションで確かめた結果が図2である[21]。上記のモデルではビームコアはKV分布をもつと仮定しているが、現実のビームがKV分布をもっているとは

考えにくい。したがって上記のようなメカニズムによって形成されるハローが、より現実的な分布をもつビームコアの周りにも形成されることを確かめる必要がある。図2では、ビームコアの初期分布として、より現実的であると考えられるWaterbag分布と呼ばれる分布を仮定している。図2から、現実的なコアの分布を仮定した粒子シミュレーションにおいても、上述のモデルで予想されたように、「コアの振動モードの混合によってハローの生成が助長されること」、また「生成したハローの大きさには上限があること」が確かめられる。また、このハローの大きさはモデルから予想される値とほぼ一致することも確かめられた。このようなハローの生成過程についての研究は、1990年代半ば以降、精力的に行われ、これまでに、さらに現実的な分布と考えられる分布を仮定したシミュレーション研究や実際の加速器のビームを用いた実験的な研究が行われた[22]。これらの結果から、現在では、実際の大強度陽子ビームにおいても、主に上述のようなモデルで理解されるメカニズムでビームハローが生成されると考えられている。

このモデルからわかるように、ビームハローの生成のドライブフォースとなるのはビームコアの振動であり、その生成を抑えるためには不整合

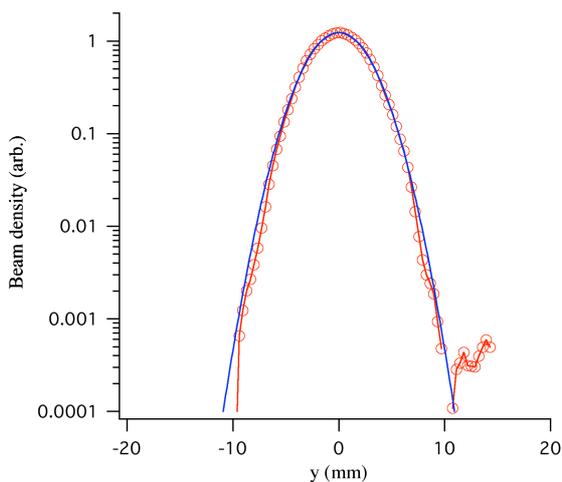


図3. J-PARC ライナックの 20MeV 地点で測定した鉛直方向のビーム分布。測定値が実線でつながれたマーカーで、ガウス関数によるフィットが実線で示されている。

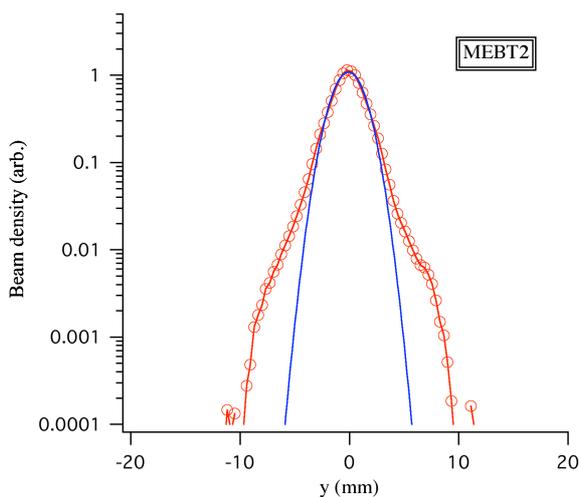


図4. J-PARC ライナックの 181MeV 地点で測定した鉛直方向のビーム分布（3MeV 地点での縦方向の整合調整前）。測定値が実線でつながれたマーカーで、ガウス関数によるフィットが実線で示されている。

に起因するビームコアの振動を抑えることが肝要である。しかし現実の加速器では、ビームモニターを設置できる位置やその精度に限界があり、不整合に起因するビームコアの振動を完全に抑えることは容易いことではない。図3、図4に、実際に J-PARC のライナックで測定した典型的なビームプロファイルの例を示す。これはワイヤー

スキャナーと呼ばれるタイプのビームモニターを用いて、ビーム中に直径 $30\mu\text{m}$ のタングステンワイヤーを走査し、検出される電流値の変化からビームの実空間方向（鉛直方向）の分布関数を測定したものである。図3は約 20MeV まで加速した位置での測定結果、図4は現在の設計エネルギーである 181MeV に到達した直後にあたる位置での測定結果である。図3からわかるように、ビームは 20MeV 地点ではガウス分布に近い分布をもっている。ところが、図4を見ると、181MeV 地点ではガウス分布に近い分布をもったコアの周りに、（図では肩のような形にみえる）ビームハローが形成されていることがわかる。この測定結果は、ビームが 20MeV から 181MeV まで加速していく間にビームハローが成長していることを示している。詳細な Particle-In-Cell シミュレーションの結果、このハロー生成の主な原因は、さらに上流の 3MeV 地点における縦方向の不整合であると突き止められた[23]。

前述のように、実際のビームはバンチ構造（縦方向に有限の長さをもつ構造）をしており、その長さが外部収束力に整合していないとビームの長さが振動を起こす。ビームの縦方向の運動と横方向（ビームの進行方向に垂直な方向）の運動は空間電荷力によって結合しているため、縦方向の不整合によって誘起された縦方向の振動がやがて横方向の振動を引き起こす。この横方向の振動がドライブフォースとなって、横方向のハローが形成される。最上流部に近い場所で不整合が存在するにもかかわらず、20MeV 地点でハローの生成が見られないのは、原因となる不整合が横方向の不整合ではなく、縦方向の不整合であるためである。このために、横方向のハローの生成に遅れが生じ、20MeV 地点ではハローが観測されない。Particle-In-Cell シミュレーションで得られたこのような描像をもとに、3MeV 地点における縦方向の整合を取り直した結果が図5である。この図からわかるように、181MeV 地点で見られた横方向のハローは、3MeV 地点における縦方向の整合を改善することによって、明らかに減少している。

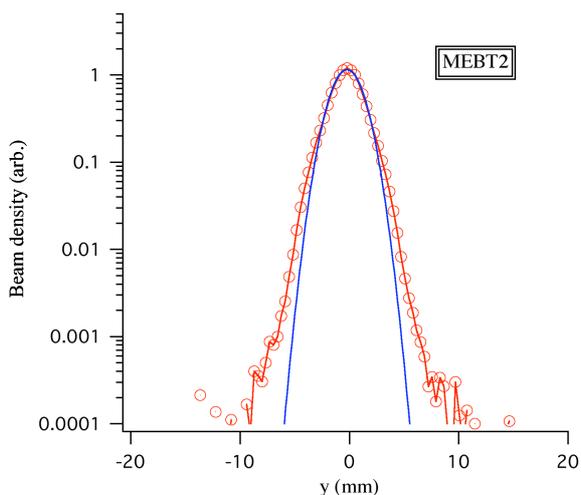


図5. J-PARC ライナックの 181MeV 地点で測定した鉛直方向のビーム分布 (3MeV 地点での縦方向の整合調整後)。測定値が実線でつながれたマーカーで、ガウス関数によるフィットが実線で示されている。

この例では、Particle-In-Cell シミュレーションで得られた結果を用いて、実際の加速器のビーム性能向上が図られているが、計算機の能力の向上によって実際の運転条件における Particle-In-Cell シミュレーションが短時間で実行できるようになり、その結果を実際の大強度加速器の調整に用いることができるようになったのは、筆者の知る限りそれほど昔のことではない。むしろ、ごく最近になって漸くそのようなことが行える環境が整ってきたといった方が現実に近いと思われる。空間電荷効果は本質的に多体現象であり、その現象を解析的に理解することは非常に難しい。したがって、単純なモデルによる物理現象の理解と Particle-In-Cell シミュレーションによる定量的な評価が現象を理解する上で非常に重要となる。これに実際のビームモニターで得られた実験結果をあわせて、モデルやシミュレーションによる理解を定量的に検証していくことが、さらに大強度の陽子ビームを実現させるために、現在、切実に求められている。

4. まとめ

この章では大強度陽子ライナックにおいて空間電荷効果が引き起こす主だった現象を概観した。大強度陽子ライナックにおける空間電荷効果の理解が大きく前進した時期として、1980年代と1990年代半ば以降の2つの時期があげられる。前者では2次元の Particle-In-Cell シミュレーションが、後者では3次元の Particle-In-Cell シミュレーションが理解を深める上で非常に重要な役割を果たしており、計算機の進歩が大強度陽子ビームにおける空間電荷効果の理解に与えた影響は軽視できない。一方、前者では重イオン慣性核融合への応用、後者では大強度のプロトンドライバーの実現という強い動機付けによる後押しがあったことも忘れてはならない。現在、プロトンドライバーとして陽子加速器に要求されるビームパワーは益々増大する傾向にあり、より小さな割合のビームロスを精密に予測するために、より精密な現象の理解が要求されている。陽子ライナックの粒子シミュレーションにおいては、単純な計算機の能力向上によって得られる知見は飽和してきつつある感がある。今後は、数値モデルの精密化や数値的な研究と実験的な研究を有機的に結びつけることに注力していくことによって、空間電荷効果が引き起こす現象の理解を深めていく必要があると考えられる。

参考文献

- [1] 例えば、S. Nagamiya, Nuclear Physics A, 827 (2009), p.179.
- [2] 例えば、T. Koseki, “Challenges and Solutions for J-PARC Commissioning and Early Operation”, in Procs. of IPAC01, Kyoto, Japan, (2010), p. 1304.
- [3] Y. Zhang, “Experience and Lessons with the SNS Superconducting Linac”, in Procs. of IPAC01, Kyoto, Japan, (2010), p. 26.
- [4] N.V Mokhov and W.Chou ed., “Beam Halo and Scraping”, Proc. of 7th ICFA mini-workshop on high intensity and high brightness hadron beams, Interlaken, Wisconsin, United States, 1999.

- [5] 高エネルギー加速器セミナー OHO'01, “大強度陽子加速器技術”, 2001.
- [6] Y. Yamazaki ed., “Accelerator Technical Design Report for J-PARC”, KEK Report 2002-13.
- [7] 例えば、T. Tajima, “Computational Plasma Physics with Application to Fusion and Astrophysics”, Westview Press, Boulder, 2004.
- [8] 例えば、W. H. Press et. al., “Numerical Recipes in C”, 2nd Edition, Cambridge University Press, New York, 1992.
- [9] 電子ライナックに応用したものではあるが、50 億個のマクロ粒子を用いた Particle-In-Cell シミュレーションの例がある。J. Qiang, R. D. Ryne, M. Venturini, A. A. Zholents, “Billion Particle Linac Simulation for Future Light Sources”, in Procs. of LINAC08, Victoria, Canada, (2008) p. 1110.
- [10] 本テキストに含まれる近藤氏の解説“RFQ のビーム力学の基礎”を参照のこと。
- [11] 例えば、H. Wiedemann, “Particle Accelerator Physics”, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [12] 例えば、I. Hoffman, L. J. Laslett, L. Smith, I. Haber, Particle Accelerators, **13** (1983), p. 145.
- [13] L. M. Kapchinsky, V. V. Vladimirsky, Procs. of the International Conference on High Energy Conference on High Energy Accelerators, CERN, Geneva, 1959, p.278.
- [14] 例えば、I. Hofmann, G. Franchetti, O. Boine-Frankenheim, J. Qiang, R. Ryne, D. Jeon, J. Wei, “Emittance Coupling in High Intensity Beams Applied to the SNS Linac”, in Procs. of PAC01, Chicago, United States, (2001) p. 2902.
- [15] 次の論文で一部の実験についての提案がなされている。D. Jeon, L. Groening, G. Franchetti, “A Fourth Order Resonance of a High Intensity Linac”, to be published in Procs. of PAC09.
- [16] 例えば、K. M. Lagniel, Nucl. Instrum. Meths. in Phys. Res. A , 345 (1994), p. 46.
- [17] Sacherer, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-18 (1971), p. 1105.
- [18] 例えば、M. Reiser, “Theory and Design of Charged Particle Beams”, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- [19] M. Ikegami, Nucl. Instrum. Meths. in Phys. Res. A , 435 (1999), p. 284.
- [20] 例えば、平田光司, “ビームトラッキング”, 高エネルギー加速器セミナー OHO'85, 1985.
- [21] M. Ikegami, Nucl. Instrum. Meths. in Phys. Res. A , 454 (2000), p. 289.
- [22] 例えば、C. K. Allen et. al, Phys. Rev. Lett. 89, 214802 (2002).
- [23] M. Ikegami, H. Sako, G. Wei, A. Miura, “Recent Progress in the Beam Commissioning of J-PARC Linac”, in Procs. of IPAC10, Kyoto, Japan, (2010), p. 774.